

Mathematica in der Beschleunigerphysik

Christopher Behrens, Bernhard Schmidt, Stephan Wesch

Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY), Uni Hamburg (UHH)

X. Berliner Mathematica-Tag
7. November 2008



Inhaltsübersicht

- 1 Einführung
 - Hintergrund
- 2 Beschleunigerprinzipien
 - Elektrostatische Beschleuniger
 - Wechselfeld-Beschleuniger
- 3 Strahldynamik
 - Magnete
 - Transversale Dynamik
 - Longitudinale Dynamik

Anfänge der Beschleunigerphysik

Kathodenstrahlen (19. Jahrhundert)

Untersuchungen über die elektrischen Vorgänge in Gasentladungsröhren führte zur Entdeckung der Kathodenstrahlen.

Braunsche Röhre (1897)

- Oszilloskop
- Monitor
- Television

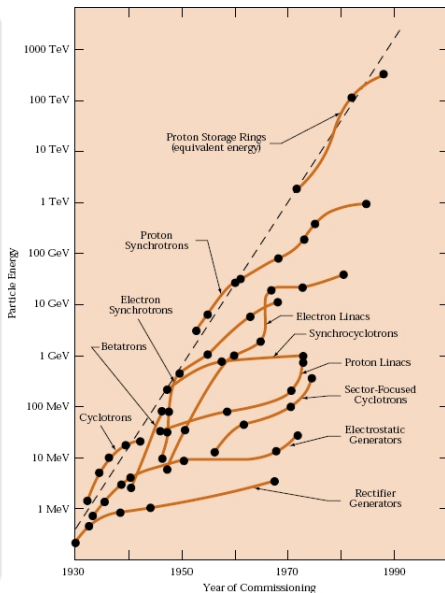


Anforderungen an Beschleuniger (Rutherford und Co)

- beliebige Strahlenergien
- hohe Strahlqualität
- hohe Strahlintensität

Kurze Geschichte der Beschleunigerphysik

- 1920 erster Kaskadengenerator (Greinacker)
- 1924 Prinzip des Linearbeschleunigers (Ising)
- 1928 erster Linearbeschleuniger (Wideröe in Aachen)
- 1929 Prinzip des Zyklotrons (Lawrence und Edlefsen)
- 1930 erster Van-de-Graaf-Generator (Van de Graaf)
- 1931 erstes Zyklotron (Lawrence und Livingston)
- 1932 Cockraft-Walton-Generator, erste Kernreaktion (Cockraft und Walton)
- 1941 erstes Betatron (Kerst und Serber)
- 1943 Prinzip des Speicherrings "Kernmühle" (Wideröe)
- 1945 Prinzip des Synchrotrons (McMillan und Veksler)
- 1946 erstes Elektronen-Synchrotron (Goward und Barnes)
- 1947 erster Elektronen-Linearbeschleuniger (Ginzton et al.)
- 1947 Entwicklung des Protonen-Linearbeschleuniger (Alvarez und Panofsky)
- 1947 Studie über Protonen-Synchrotrons (Oliphant)
- 1950/52 Prinzip der starken Fokussierung (Chritophilos, Courant et al.)
- 1952 erstes Protonen-Synchrotron (Green et al.)
- 1961 erster Elektronen-Positronen Speicherung (Touschek)

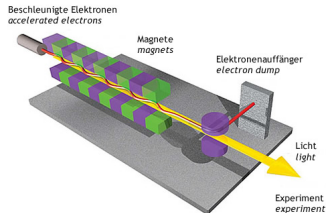
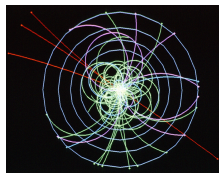
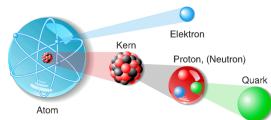


Anwendungen von Beschleunigeranlagen

Auflösen kleiner Strukturen
(Streuexperimente)

Anregung von Teilchensystemen,
Teilchenerzeugung

Synchrotron-Strahlungsquellen,
Freie-Elektronen-Laser



Beschleunigeranlagen weltweit

Beschleunigeranlagen weltweit (Scharf und Chomicki 1996)

Kategorie	Anzahl
Hochenergiephysik ($E > 1\text{GeV}$)	112
Strahlentherapie	> 4000
Biomedizinische Forschung	800
Isotopenproduktion	~ 200
Industrielle Anwendungen	~ 1500
Ionen Implantation	> 2000
Modifikationen von Oberflächen	~ 1000
Synchrotron-Strahlungsquellen	~ 50
Gesamtanzahl	~ 10000

Beschleunigerphysik

Beschleuniger sind heute so groß und komplex, dass sich eine eigene Disziplin gebildet hat. \Rightarrow sie sind kein Selbstzweck

Beispiele



Hinweis

Wechsel zu Mathematica!!!

Grundgleichungen und Kenngrößen

Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Energieänderung (Beschleunigung)

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Felder in der Beschleunigerphysik ($v \approx c$)

- Elektrisches Feld \vec{E} : Beschleunigung von Teilchen
- Magnetisches Feld \vec{B} : Ablenkung und Fokussierung von Teilchen

Energie

- $dE = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v} dt = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow E = q \cdot U$
- $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{AsV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}$

Cockcraft-Walton Generator (Greinacher)

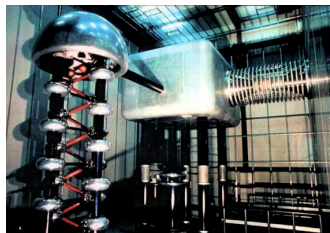
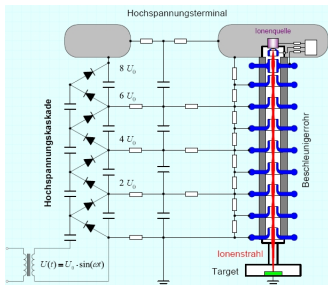


Abbildung: PSI-Vorbeschleuniger

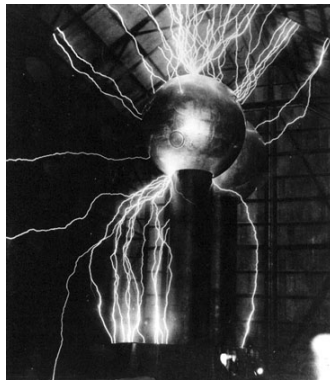
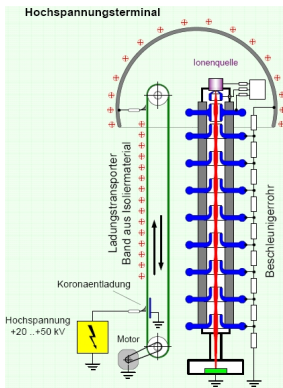
Beschleunigerspannung

$$U_{tot} = 2nU_0 - \frac{2\pi I}{\omega C} \left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n \right)$$

Eigenschaften

- Beschleunigerspannungen von einigen MV
- Heute: als Vorbeschleuniger und zur industriellen Bestrahlung

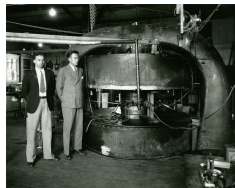
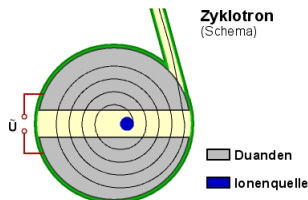
Van-de-Graaf Generator



Eigenschaften

- Beschleunigerspannungen von bis zu 10MV
- Tandem-Van-de-Graaf Beschleuniger (nur Ionen)
- Heute: Kernphysik und Industrie

Zyklotron



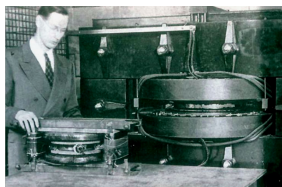
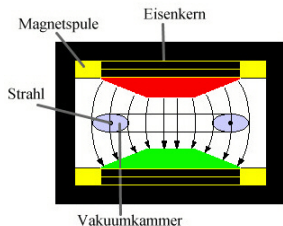
Beschleunigung

- Teilchen laufen auf Kreisbahnen mit der Zyklotronfrequenz ω_z
- $\omega_z = \frac{q}{m} \cdot \frac{B}{\gamma}$

Eigenschaften

- Beschleunigerenergien bis zu einigen 100MeV (Protonen)
- nur Protonen und Ionen, keine Elektronen
- Energieerhöhung durch Isochron-Zyklotron ($B(\gamma)$) und Synchro-Zyklotron ($\omega(\gamma)$)

Betatron



Beschleunigung

- Teilchen laufen auf fester Kreisbahn
- veränderliches Magnetfeld induziert elektrisches Feld ($\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$)
- Wideröe'sche Betatronbedingung: $|\vec{B}(t)| = \frac{1}{2} \langle |\vec{B}(t)| \rangle + |\vec{B}_0(t)|$

Eigenschaften

- Beschleunigerenergien bis zu einigen 100MeV (Elektronen)
- ungeeignet für Protonen (zu wenige Umläufe und keine Dämpfung)

Synchrotron (Speichering)

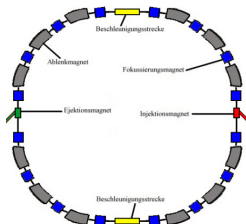


Abbildung: DESY-3, DESY-2

Beschleunigung

- Teilchen laufen auf fester Kreisbahn ($R \sim B/E$)
- Magnetfeld wird synchron zur Energie hochgefahren

Eigenschaften

- Beschleunigerenergien bis zu 100GeV (Elektronen)
- Beschleunigerenergien bis zu 7TeV (Protonen)

Linear Beschleuniger (Linac)

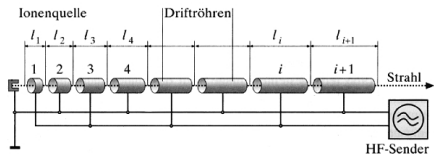


Abbildung: GSI Linac

Beschleunigung

- Teilchen verlaufen geradlinig
- Beschleunigung zwischen den feldfreien Driftstrecken ($l \sim \beta$)

Eigenschaften

- Beschleunigerenergie ist begrenzt durch Platz und Kosten

Beispiele



Hinweis

Wechsel zu Mathematica!!!

Strahlführung

Bewegungsgleichung

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = q \cdot v \cdot B_{\perp} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{q}{p} \cdot B_{\perp}$$

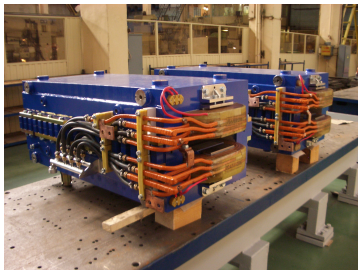
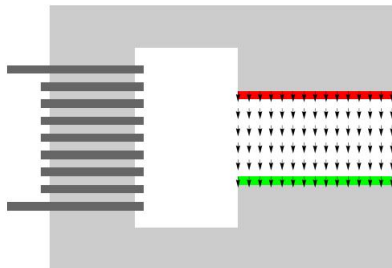
Multipolentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} \cdot B_{\perp} &= \frac{q}{p} \cdot B_0 + \frac{1}{1!} \frac{q}{p} \cdot \frac{dB}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{q}{p} \cdot \frac{d^2B}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{q}{p} \cdot \frac{d^3B}{dx^3} x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{R} + k \cdot x + \frac{1}{2!} m \cdot x^2 + \frac{1}{3!} o \cdot x^3 + \dots \end{aligned}$$

Magnete

Multipol	Definition	Wirkung
Dipol	$\frac{1}{R}$	Strahlablenkung
Quadrupol	k	Strahlfokussierung
Sextupol	m	Kompensation der Chromazität
Oktupol	o	Feldfehler oder Feldkompensation

Dipole



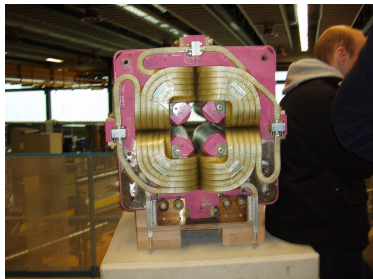
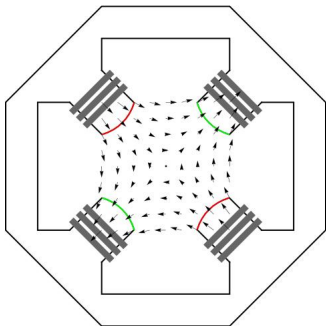
Dipolmagnet

- homogene Feldverteilung
- Kraft ist unabhängig von der transversalen Position
- Felder bis zu 2T (konventionell)

Anwendung

- Strahlablenkung

Quadrupole



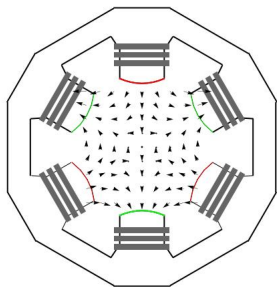
Quadrupolmagnet

- inhomogene Feldverteilung
- Kraft ist abhängig von der transversalen Position ($\sim x$)

Anwendung

- Strahlfokussierung (nur in einer Ebene)

Sextupole



Sextupolmagnet

- inhomogene Feldverteilung
- Kraft ist abhängig von der transversalen Position ($\sim x^2$)

Anwendung

- Kompensation der Chromazität

Lineare Teilchenoptik

Bewegungsgleichungen (Hill'sche DGL)

- $x''(s) + \left(\frac{1}{R^2(s)} - k(s) \right) x(s) = \frac{1}{R(s)} \frac{\Delta p}{p}$
- $y''(s) + k(s)y(s) = 0$

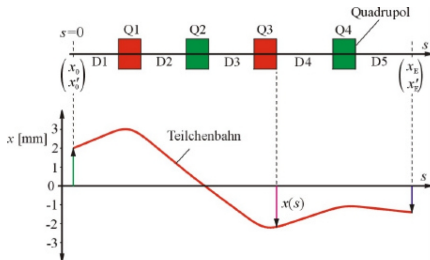
Quadrupolstärke k

In den beide Ebenen hat k unterschiedliche Vorzeichen \Rightarrow Fokussierung nur in einer Ebene

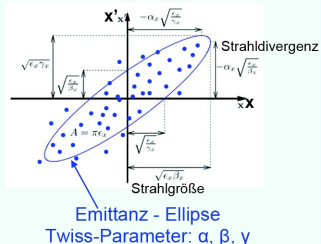
Teilchentrajektorien

- stückweise Lösung der DGL \Rightarrow Matrixformalismus
- allgemeine Lösung der DGL \Rightarrow optische Funktionen (Twiss-Parameter)

Lineare Teilchenoptik



Horizontal Phasenraum (x, x')



Transfermatrizen

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

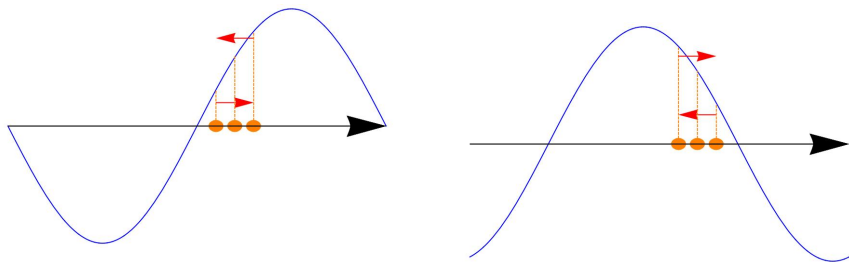
Betafunktion

$$x(s) = \sqrt{\epsilon \cdot \beta(s)} \cdot \cos(\Psi(s) + \Psi_0)$$

Lineare Teilchenoptik

Sextupole sind nicht-lineare Elemente \Rightarrow kein Matrixformalismus

Synchrotronschwingungen



Longitudinale Fokussierung

Beschleunigung wird nicht mit dem maximalen Feld erzeugt \Rightarrow
longitudinale Schwingungen

Bereiche

- nicht-relativistische Energien (Änderung der Geschwindigkeit)
- relativistische Energien (Änderung des Orbits)

Beispiele



Hinweis

Wechsel zu Mathematica!!!

Ende



Danke für Ihre Aufmerksamkeit